



Walter Lagemann
Wolf Rambatz

Wirtschaftsmathematik und Statistik

Ein Praktikum für die Weiterbildung
zum Betriebswirt und zur Betriebswirtin

HERAUSGEBER DR. RUDOLF RÖHR



Inhaltsverzeichnis

Teil 1 Mathematische Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

Walter Lagemann (Abschnitte 1.1 –1.7)

1.1	Begriffe der Mengenlehre	27
1.1.1	Mengen	27
1.1.1.1	Begriff	27
1.1.1.2	Darstellungsformen	28
1.1.1.3	Mächtigkeit von Mengen	29
1.1.1.4	Gleichheit von Mengen	29
1.1.2	Teilmengen	30
1.1.2.1	Begriff	30
1.1.2.2	Darstellungsform	30
1.1.2.3	Teilmengesetz und Teilmengenrelationen	30
1.1.2.4	Eigenschaften der Teilmengenrelationen	33
1.1.3	Differenzmenge	33
1.1.3.1	Begriff	33
1.1.3.2	Darstellungsform	34
1.1.4	Grundmenge	34
1.1.4.1	Begriff	34
1.1.4.2	Darstellungsform und Anwendungen	35
1.1.5	Ergänzungsmenge	36
1.1.5.1	Begriff	36
1.1.5.2	Darstellungsform und Beispiele	36
1.1.5.3	Gesetze der Komplementarität	38
1.1.6	Anwendungsfälle der Mengenlehre	38
1.2	Verknüpfen von Mengen	41
1.2.1	Vereinigen von Mengen	41
1.2.1.1	Begriff und Darstellungsform	41
1.2.1.2	Gesetzmäßigkeit	43
1.2.1.3	Anwendungsbeispiele	43
1.2.2	Schneiden von Mengen	44
1.2.2.1	Begriff und Darstellungsform	44
1.2.2.2	Gesetzmäßigkeit	44
1.2.2.3	Anwendungsbeispiele	44
1.2.3	Vereinigen und Schneiden von Mengen	46
1.2.3.1	Begriff und Darstellungsform	46
1.2.3.2	Gesetzmäßigkeiten und Dualitätsprinzip	48
1.2.3.3	Beweisverfahren und Verifikation	48
1.2.3.4	Anwendungsbeispiele	52
1.2.4	Mengenoperationen in der Grundmenge	54
1.2.4.1	Einführungsbeispiele und Darstellung	54
1.2.4.2	De Morgansches Gesetz	55
1.2.4.3	Teilmengen der Grundmenge und Baumdiagramm	56
1.2.4.4	Textanalysen und Ergebniserfassung in Diagrammen	60
1.2.4.5	Diagramm-Analyse	66

1.3	Zahlenbereiche und ihre Bedeutung	69
1.3.1	Zahlenmengen	69
1.3.1.1	Menge der natürlichen Zahlen	69
1.3.1.2	Menge der ganzen Zahlen	69
1.3.1.3	Menge der rationalen Zahlen	69
1.3.1.4	Menge der reellen Zahlen	70
1.3.2	Bedeutung der Zahlenmengen	70
1.4	Der elektronische Taschenrechner und seine Bedeutung für die Durchführung von Rechenvorgängen in Wirtschafts-mathematik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	73
1.4.1	Allgemeine Hinweise	73
1.4.2	Einsatzmöglichkeiten des Taschenrechners	77
1.5	Rechenoperationen mit reellen Zahlen und dem Taschenrechner	79
1.5.1	Begriffe und Rechengesetze	79
1.5.1.1	Addition und Subtraktion von reellen Zahlen	79
1.5.1.2	Multiplikation und Division von reellen Zahlen	79
1.5.1.3	Potenzieren und Radizieren	82
1.5.1.4	Logarithmieren	84
1.5.2	Rechenbeispiele mit dem Taschenrechner	86
1.5.2.1	Additions- und Subtraktionsvorgänge	86
1.5.2.2	Multiplikations- und Divisionsvorgänge	87
1.5.2.3	Potenzieren	87
1.5.2.4	Radizieren	88
1.5.2.5	Logarithmieren	89
1.5.3	Berechnungen mit dem Taschenrechner	91
1.5.3.1	Bestimmung von komplexen Zahlentermen	91
1.5.3.2	Bestimmung von Funktionswerten	92
1.5.3.3	Bestimmung von finanzmathematischen Ausdrücken	93
1.5.3.4	Bestimmung von statistischen Daten	94
1.5.3.5	Bestimmung von Größen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung	95
1.6	Algebraische Termumformungen	96
1.6.1	Addition und Subtraktion von algebraischen Summen	96
1.6.2	Auflösen von Klammern	97
1.6.3	Multiplikation von Produkttermen und algebraischen Summen	98
1.6.4	Faktorisieren von Produkten, algebraischen Summen und Bruchtermen	99
1.6.5	Division von Produkttermen und algebraischen Summen	100
1.6.6	Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen	102
1.6.7	Erweitern und Kürzen von Bruchtermen	102
1.6.8	Addition und Subtraktion von Bruchtermen	104
1.6.9	Rechenoperationen mit Potenzen und Potenzierungsvorgänge	105
1.6.10	Polynomdivision und Faktorisieren von Potenzausdrücken	108
1.6.11	Radizieren und Verknüpfen von Wurzeltermen	110
1.7	Aussagen, Aussageformen und ihre Verknüpfbarkeit	112
1.7.1	Aussagen und Aussageformen	112
1.7.2	Verknüpfungsmöglichkeiten von Aussagen und Aussageformen	114
1.7.2.1	Einstellige Verknüpfung (Negation)	114
1.7.2.2	Zweistellige Verknüpfungsformen	115
1.7.2.2.1	Konjunktion	116

1.7.2.2.2	Disjunktion	117
1.7.2.2.3	Subjunktion und Implikation	119
1.7.2.2.4	Bijunktion und Äquivalenz	121
1.7.2.2.5	Alternative	123
1.7.3	Komplexe Aussagen und Aussageformen	124
1.7.3.1	Kontingenzen	124
1.7.3.2	Tautologien	124
1.7.3.3	Kontradiktionen	125
1.7.4	Erfüllbarkeit von Aussageformen	125
1.7.4.1	Teilweise erfüllbare Aussageformen (Kontingenzen)	125
1.7.4.2	Allgemein erfüllbare Aussageformen (Tautologien)	126
1.7.4.3	Nicht erfüllbare Aussageformen (Kontradiktionen)	126
1.7.5	Bedeutung der aussagelogischen Funktionen und Anwendungsbeispiele	127
1.7.5.1	Aussagelogische Funktionen und ihre Bedeutung	127
1.7.5.2	Anwendungsbeispiele	129
	Wolf Rambatz (Abschnitte 1.8 – 1.14)	
1.8	Aussageformen mit einer Variablen	139
1.8.1	Gleichung als Aussage	139
1.8.2	Gleichung als Aussageform	139
1.8.3	Ungleichung als Aussage	140
1.8.4	Ungleichung als Aussageform	141
1.8.5	Lösungsmenge	142
1.8.6	Äquivalenz von Aussageformen	142
1.8.7	Gültigkeit von Aussageformen innerhalb einer Grundmenge	143
1.9	Lösungsverfahren bei Gleichungen mit einer Variablen	146
1.9.1	Lineare Gleichungen	146
1.9.1.1	Umformung und Bestimmung der Lösungsmenge	146
1.9.1.2	Beispiele für Umformungen von linearen Gleichungen in der Grundmenge "	147
1.9.1.3	Lineare Gleichungen in der Grundmenge $\sim$ (Bruchgleichungen)	150
1.9.1.4	Gleichungen mit Variablen im Nenner	151
1.9.1.5	Anwendung linearer Gleichungen mit einer Variablen in der Wirtschaftspraxis	153
1.9.2	Quadratische Gleichungen	157
1.9.2.1	Rein-quadratische Gleichungen	157
1.9.2.2	Gemischt-quadratische Gleichungen	160
1.9.2.3	Anwendung quadratischer Gleichungen in der Wirtschaftspraxis	166
1.9.3	Kubische Gleichungen	169
1.9.3.1	Allgemeines zu kubischen Gleichungen	169
1.9.3.2	Bestimmung des ersten Lösungselementes einer kubischen Gleichung	169
1.9.3.3	Bestimmung der weiteren Lösungselemente mit der Polynomdivision	170
1.9.3.4	Lösung mit Horner-Schema	171
1.9.3.5	Anwendung kubischer Gleichungen in der Wirtschaftspraxis	173
1.9.4	Wurzelgleichungen	176
1.9.5	Exponentialgleichungen	181
1.9.5.1	Allgemeines zu Exponentialgleichungen	181
1.9.5.2	Beispiele für Exponentialgleichungen	182

1.10	Lösungsverfahren bei Ungleichungen mit einer Variablen	184
1.10.1	Bedeutung von Ungleichungen in der Wirtschaftsmathematik	184
1.10.2	Lineare Ungleichungen ohne Variablen im Nenner	184
1.10.2.1	Umformungsregeln und Lösungsmenge	184
1.10.3	Lineare Ungleichungen mit Variablen im Nenner	187
1.10.3.1	Fallunterscheidung	187
1.10.3.2	Zusammenfassung: Ungleichungen mit Variablen im Nenner	193
1.10.4	Quadratische Ungleichungen	193
1.11	Funktionen in der Wirtschaftsmathematik	195
1.11.1	Einführung	195
1.11.2	Produktmenge, Relation und Funktion	196
1.11.2.1	Aussageformen mit einer Variablen	196
1.11.2.2	Aussageformen mit zwei Variablen	196
1.11.2.3	Geordnete Paare und Produktmenge	197
1.11.2.4	Relationen	198
1.11.2.5	Funktionen als eindeutige Relationen	200
1.11.2.6	Graphische Darstellung zweidimensionaler Aussageformen im Koordinatensystem	202
1.11.2.7	Definitions- und Wertebereich	204
1.11.2.8	Graphische Darstellung von Relationen und Funktionen	205
1.11.2.9	Formale Darstellung von Funktionen	208
1.11.2.10	Umkehrrelationen und -funktionen	210
1.11.3	Funktionsarten	214
1.11.3.1	Algebraische Funktionen	215
1.11.3.2	Rationale Funktionen	215
1.11.3.3	Ganz-rationale Funktionen	216
1.11.3.4	Gebrochen-rationale Funktionen	216
1.11.3.5	Irrationale algebraische Funktionen	217
1.11.3.6	Transzendente Funktionen	218
1.11.3.7	Exponentialfunktionen	218
1.11.3.8	Logarithmusfunktionen	218
1.11.3.9	Trigonometrische Funktionen	219
1.11.3.10	Sonderform konstante Funktion (A)	219
1.12	Lineare Funktionen	221
1.12.1	Begriff der linearen Funktion	221
1.12.2	Steigung linearer Funktionen	222
1.12.3	Konstante Funktionen (B)	225
1.12.4	Parallelverschiebungen	227
1.12.5	Lineare Umkehrfunktionen	228
1.12.6	Anwendung linearer Funktionen in der Wirtschaftspraxis	231
1.13	Nichtlineare Funktionen	245
1.13.1	Einführung	245
1.13.2	Ganz-rationale Funktionen	245
1.13.3	Quadratische Funktionen	248
1.13.3.1	Einführung	248
1.13.3.2	Rein-quadratische Funktionen	250
1.13.3.3	Gemischt-quadratische Funktionen	255
1.13.3.4	Ermittlung des Scheitelpunktes	257
1.13.3.5	Anwendung quadratischer Funktionen in der Wirtschaftspraxis	258
1.13.4	Kubische Funktionen	263
1.13.4.1	Graphische Betrachtung kubischer Funktionen	263

1.13.4.2	Anwendung kubischer Funktionen in der Wirtschaftspraxis	268
1.13.5	Gebrochen-rationale Funktionen	273
1.13.6	Wurzelfunktionen	276
1.13.7	Exponentialfunktionen	277
1.13.8	Logarithmusfunktionen	282
1.14	Folgen und Reihen	284
1.14.1	Einführende Bemerkungen	284
1.14.2	Formale Darstellung von Folgen	285
1.14.3	Folgen und Funktionen	285
1.14.4	Reihen	286
1.14.5	Arithmetische Folgen	287
1.14.6	Arithmetische Reihen	292
1.14.7	Geometrische Folgen	295
1.14.8	Geometrische Reihen	300
1.14.9	Unendliche geometrische Folgen und Reihen	306

Teil 2 Wirtschaftsmathematik

Wolf Rambatz

2.1	Lineare Algebra und Operations Research	311
2.1.1	Einführung	311
2.1.2	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	313
2.1.2.1	Graphische Lösung	314
2.1.2.2	Rechnerische Lösung	315
2.1.2.2.1	Rechnerische Lösung mit Einsetzmethode	315
2.1.2.2.2	Rechnerische Lösung mit Gleichsetzungsmethode	316
2.1.2.2.3	Rechnerische Lösung mit Additionsmethode	318
2.1.2.2.4	Rechnerische Lösung mit Determinanten	321
2.1.2.3	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen (A)	324
2.1.2.4	Beispiele aus der Wirtschaftspraxis	326
2.1.3	Lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen	333
2.1.3.1	Lösung von $n \times n$ -Systemen	334
2.1.3.1.1	Lösung mit der Additionsmethode	334
2.1.3.1.2	Rechnerische Lösung mit dem Gauß-Algorithmus	337
2.1.3.1.3	Rechnerische Lösung mit Determinanten	343
2.1.3.1.4	Entwicklung von Determinanten nach einer Zeile	346
2.1.3.1.5	Determinanten bei Systemen mit $n > 3$	348
2.1.3.1.6	Praktische Beispiele für $n \times n$ -Systeme	350
2.1.3.1.7	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen (B)	358
2.1.3.2	Vektoren und Matrizen	362
2.1.3.2.1	Mehrdimensionale Zahlenmengen	362
2.1.3.2.2	Vektoren in Geometrie und Naturwissenschaften	362
2.1.3.2.3	Vektoren in der linearen Algebra und Ökonomie	364
2.1.3.2.4	Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl	364
2.1.3.2.5	Addition von Vektoren	365
2.1.3.2.6	Zusammenhang zwischen Vektoren und Matrizen	366
2.1.3.2.7	Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	366
2.1.3.3	Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe der inversen Matrix	367
2.1.3.4	Linearkombinationen von Vektoren	371

2.1.4	Lineare Ungleichungssysteme und lineare Optimierung mit zwei Variablen	380
2.1.4.1	Einführung	380
2.1.4.2	Graphische Darstellung linearer Ungleichungssysteme	381
2.1.4.3	Graphische Darstellung der Zielfunktion mit Hilfe von Iso-Geraden	386
2.1.4.4	Graphische Lösung (Maximierung)	387
2.1.4.5	Abhängigkeit der Lösung von der Steigung der Zielfunktionsgeraden	388
2.1.4.6	Graphische Lösung (Minimierung)	390
2.1.4.7	Sonderfälle	392
2.1.4.7.1	Zielfunktion parallel zu einer der Restriktionen	392
2.1.4.7.2	Unterschiedliche Einheiten in den Restriktionen	393
2.1.4.7.3	Gleichungen als Restriktionen (kombinierte Systeme A)	397
2.1.4.8	Transportproblem (A)	401
2.1.5	Lineare Optimierung mit drei und mehr Variablen (Simplex-Methode)	406
2.1.5.1	Einführung	406
2.1.5.2	Lösung mit der Simplex-Methode (Maximierung)	406
2.1.5.2.1	Einführung von Schlupfvariablen	406
2.1.5.2.2	Lineares Gleichungssystem	408
2.1.5.2.3	Pivot-Verfahren	409
2.1.5.3	Regeln für die Simplex-Methode	418
2.1.5.4	Simplex-Methode mit der »Greatest Change«-Variante	418
2.1.5.5	Nach unten einschränkende Bedingungen (unzulängliche Ausgangslösung)	421
2.1.5.6	Gleichungen als einschränkende Bedingungen (kombinierte Systeme B)	425
2.1.5.7	Minimierung mit der Simplex-Methode: Das duale Problem	428
2.1.5.8	Sonderfälle	431
2.1.6	Operations Research (Exkurs)	431
2.1.6.1	Einführende Bemerkungen	431
2.1.6.2	Erweiterungen und Anwendungen der Simplex-Methode	435
2.1.6.2.1	Unter- und Obergrenzen (Bounds)	435
2.1.6.2.2	Transportproblem (B)	441
2.1.6.3	Netzplantechnik	443
2.1.6.3.1	Methoden der Netzplantechnik	444
2.1.6.3.2	Netzplantechnik nach CPM	444
2.1.6.3.3	Netzplantechnik unter Berücksichtigung freier Pufferzeiten (CPM)	448
2.1.6.3.4	Transportproblem als Zuordnungsproblem (C)	451
	Formeln, Regeln und Definitionen	455
	Stichwortverzeichnis	458